Instituto de Matemática
Cálculo I
2018-I

Prueba 1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) [**30 ptos.**] Considere las funciones

$$f(x) = \log_2(2-2x) + 2\log_{1/2}(2x+1) - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3^{a-x} + 2\cdot 9^{\frac{ax}{2}} - 14$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

a) (**5 ptos.**) Determinar el dominio de f.

b) (**10 ptos.**) Determinar los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

c) (**7 ptos.**) Determinar el(los) valor(es) de $a \in \mathbb{R}$, si existen, de tal modo que $g(1) = 0$.

d) (**8 ptos.**) Para $a = 0$, encontrar la inversa de g.

2) [**30 ptos.**]

a) (**5 ptos.**) Determinar el valor de $\sin(\theta + \pi)$, sabiendo que $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ y $\sec(\theta) = -\frac{13}{5}$

b) (**10 ptos.**) Demostrar las siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} = 2\cot(x)$$

c) (**15 ptos.**) Encontrar todos los valores de $x \in [0, 2\pi)$ tales que

$$\cos(2x) + \operatorname{sen}(x) = 0$$

PAUTA

1) a) Se debe tener que

$$2-2x>0 \ \wedge \ 2x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1>x \ \wedge \ x>-1/2 \quad (3 \text{ pts. })$$

Luego $\mathrm{Dom}(f)=]-1/2,1[$ (2 pts.).

b) Corte con el eje Y:

$$y=f(0)=\log_2(2)+2\log_{1/2}(1)-2=-1 \qquad (3 \text{ pts. })$$

Corte con el eje X: Buscamos los $x\in \mathrm{Dom}(f)=]-1/2,1[$ tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= 0\\ \log_2(2-2x)+2\log_{1/2}(2x+1)-2 &= 0\\ \log_2(2-2x)-2\log_2(2x+1) &= 2\\ \log_2\left(\frac{2-2x}{(2x+1)^2}\right) &= 2\\ \frac{2-2x}{(2x+1)^2} &= 4\\ 8x^2+9x+1 &= 0 \qquad (4 \text{ pts. }) \end{aligned}$$

cuya ecuación tiene soluciones $x=-1/8$ y $x=-1$ (2 pts.). Luego, el único punto de corte con el eje X es en $x=-1/8$ (1 pts.).

c) Tenemos

$$\begin{aligned} g(1) &= 0\\ 3^{a-1}+2\cdot 9^{\frac{a}{2}}-14 &= 0 \qquad (1 \text{ pts. })\\ \frac{3^a}{3}+2\cdot 3^a &= 14 \qquad (1 \text{ pts. })\\ \frac{7}{3}\cdot 3^a &= 14 \qquad (1 \text{ pts. })\\ 3^a &= 6 \qquad (2 \text{ pts. })\\ a &= \log_3 6 \qquad (2 \text{ pts. }) \end{aligned}$$

d) Para $a=0$ nos queda la función $y=g(x)=3^{-x}-12$. Note que

$$y=3^{-x}-12 \ \Leftrightarrow \ y+12=3^{-x} \ \Leftrightarrow \ x=-\log_3(y+12)$$

Luego $g^{-1}(x)=-\log_3(x+12)$ (8 pts.)

2) a) De la condición que $\sec(\theta) = -\frac{13}{5}$, o equivalentemente $\cos(\theta) = -\frac{5}{13}$, se tiene que

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

Como $\operatorname{sen}(\theta)$ es positivo en el segundo cuadrante, tenemos que $\operatorname{sen}(\theta) = 12/13$. Luego

$$\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{12}{13} \qquad \text{(5 pts.)}$$

b) Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} &= \frac{\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1-\cos^2(x)}) \quad \text{(3 pts.)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \quad \text{(2 pts.)} \\ &= \frac{2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \quad \text{(2 pts.)} \\ &= 2\cot(x) \quad \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

3) Tenemos que

$$\begin{aligned} \cos(2x) + \operatorname{sen}(x) &= 0 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) &= 0 \\ 2\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 1 &= 0 \\ 2u^2 - u - 1 &= 0 \quad \text{(5 pts.)} \end{aligned}$$

con $u = \operatorname{sen}(x)$. Esta última ecuación cuadrátrica tiene soluciones $u = 1$ y $u = -1/2$ (2 pts.). De $\operatorname{sen}(x) = 1$ obtenemos la solución $x = \pi/2$ (4 pts.) y de $\operatorname{sen}(x) = -1/2$ obtenemos las soluciones $x = \frac{7\pi}{6}$ y $x = \frac{11\pi}{6}$ (4 pts.).